Aufgabe 25

Satz . *Seien $p \in \{2,3,4,\dots\}$ und $g_1, g_2, \dots, g_p \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gibt genau dann einen Baum $B = (E, K)$ mit den p Ecken $E = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$, so dass $\operatorname{grad} e_i = g_i$ für alle $i \in \{1,2,\dots,p\}$ ist, wenn wir*

$$\sum_{i=1}^{p} g_i = 2p - 2$$

haben.

Für $p = 1$ könnten wir eine ähnliche Aussage beweisen, für welche wir aber $g_1 = 0$ zulassen müssten. Da ein Baum nach Definition zusammenhängend ist, können wir aber für kein $p > 1$ zulassen, dass $g_i = 0$ ist für ein $i \in \{1,2,\dots,p\}$. Deshalb betrachten wir hier nur $p > 1$.

Beweis. Es ist die Äquivalenz zweier Aussagen zu zeigen. Dafür zeigen wir, dass die Implikationen in beiden Richtungen gelten. Als erstes betrachten wir dafür den einfachen Fall, dass B ein Baum mit den Ecken $e_1, \dots, e_p$ ist, wobei $\operatorname{grad} e_i = g_i$ für alle $i = 1, 2, \dots, p$.[1]

Sei also B ein solcher Baum mit den Ecken $e_1, \dots, e_p$ und $\operatorname{grad} e_i = g_i$ für alle i.[2] Da ein Baum mit p Ecken stets genau $q = p - 1$ Kanten hat, erhalten wir mit dem Hand-Shaking-Lemma (HS)

$$2p - 2 = 2(p-1) = 2q \underset{\text{HS}}{=} \sum_{i=1}^{p} \operatorname{grad} e_i \underset{\text{Vor.}}{=} \sum_{i=1}^{p} g_i,$$

was zu zeigen war. Damit ist noch die andere Implikation zu zeigen.

Sei dafür $\sum_{i=1}^{p} g_i = 2p - 2$ für ein p-Tupel $(g_1, g_2, \dots, g_p)$ von natürlichen Zahlen. Wir werden nun die Implikation per Induktion über p beweisen. Da wir die Aussage für $p \geq 2$ beweisen möchten, fangen wir mit $p = 2$ an.

Induktionsanfang. Sei $p = 2$. Dann muss, wegen

$$g_1 + g_2 = \sum_{i=1}^{2} g_i = 2p - 2 = 2$$

und $g_i \geq 1$, $g_1 = g_2 = 1$ gelten. Der Baum $\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\circ$ erfüllt also die Forderung: Er besitzt genau zwei Ecken e_1, e_2, welche beide vom Grad 1 sind.

Von nun an können wir davon ausgehen, dass $p > 2$ ist. Wir betrachten zunächst einige Eigenschaften der g_i, die wir dann im Induktionsschritt benutzen werden. Man kann diese als ein ausgegliedertes Lemma betrachten.

Die g_i seien o. B. d. A. aufsteigend angeordnet, also $g_1 \leq g_2 \leq \dots \leq g_p$. Andernfalls können wir sie so umnummerieren, dass diese Ungleichungen gelten.

Wäre $g_2 \geq 2$ so hätten wir

$$2p - 2 = \sum_{i=1}^{p} g_i \geq g_1 + \sum_{i=2}^{p} 2 = g_1 + 2(p-1) \geq 1 + 2p - 2.$$

[1] Hier könnte man auch wieder $i \in \{1,2,\dots,p\}$ schreiben; nichts anderes ist mit dieser Notation gemeint. Ebenso wäre $1 \leq i \leq p$ möglich, wobei implizit $i \in \mathbb{Z}$ vorausgesetzt wird.

[2] Natürlich wieder aus der gleichen Menge wie oben.

Dies ist aber offensichtlich ein Widerspruch ($2p - 2$ ist schließlich strikt kleiner als $2p - 2 + 1$). Da aus $g_1 \geq 2$ schon $g_2 \geq 2$ folgt, muss stets $g_1 = g_2 = 1$ gelten.

Wäre $g_3 = g_4 = \ldots = g_p = 1$, also nach obiger Überlegung $g_i = 1$ für alle i, so gölte[3]

$$2p - 2 = \sum_{i=1}^{p} g_i = \sum_{i=1}^{p} 1 = p \iff p - 2 = 0.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $p > 2$. Also gibt es ein $j \geq 3$,[4] so dass $g_j \geq 2$ ist.

Induktionsschritt. Für ein beliebiges $(p-1)$-Tupel $(g_2', g_3', \ldots, g_p')$ mit der Eigenschaft $2(p-1) - 2 = \sum_{i=2}^{p} g_i'$ gebe es einen Baum B', dessen Ecken $e_2, e_3, \ldots, e_p$ alle $\operatorname{grad} e_i = g_i'$ erfüllen.[5]

Ausgehend von den gegebenen Zahlen g_i definieren wir nun die g_i' für $2 \leq i \leq p$ wie folgt:

$$g_i' := \begin{cases} g_i & \text{falls } i \neq j, \\ g_i - 1 & \text{falls } i = j. \end{cases}$$

Dann haben wir

$$\sum_{i=2}^{p} g_i' \underset{\text{Def.}}{=} \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^{p} g_i + g_j - 1 = \sum_{i=1}^{p} g_i - g_1 - 1 \underset{g_1=1}{=} \sum_{i=1}^{p} g_i - 2 \underset{\text{Vor.}}{=} 2(p-1) - 2,$$

weshalb wir die Induktionsvoraussetzung auf $(g_2', g_3', \ldots, g_p')$ anwenden können und einen Baum B' mit den Ecken $e_2, e_3, \ldots, e_p$ erhalten, wobei $\operatorname{grad} e_i = g_i'$ ist für alle $i = 2, 3, \ldots, p$.

B' ist schon fast ein Baum mit der gesuchten Eigenschaft. B' hat lediglich eine Ecke zu wenig hat, und $\operatorname{grad} e_j = g_j - 1$ ist um 1 zu klein. Fügen wir also eine neue Ecke e_1 und eine Kante $e_1 e_j$ zu B' hinzu, so erhalten wir den neuen Baum $B := B' + e_1 + e_1 e_j$, welcher die gesuchte Eigenschaft hat. Es ist nämlich $\operatorname{grad}_B e_i = \operatorname{grad}_{B'} e_i = g_i$ für alle $i \in \{2, 3, \ldots, p\}$ mit $i \neq j$ und $\operatorname{grad}_B e_j = \operatorname{grad}_{B'} e_j + 1 = g_i - 1 + 1$. □

Derart ausführlich wird man einen solchen Beweis selten sehen. Daher im Anschluss der Beweis zum Vergleich noch einmal in kürzerer Form.

Beweis (kurz). Sei B ein Baum mit den Ecken $\{e_1, \ldots, e_p\}$, die $\operatorname{grad} e_i = g_i$ für alle i erfüllen. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{p} g_i = 2q = 2p - 2$$

laut Hand-Shaking-Lemma.

Seien umgekehrt $g_1, \ldots, g_p$ gegeben mit $\sum_{i=1}^{p} g_i = 2p - 2$. Die Bäume für $p = 1, 2$ erfüllen offenbar $\operatorname{grad} e_i = g_i$ für alle i. Sei nun $p > 2$. O. B. d. A. können

[3] Konjunktiv II von *gelten*; unüblich aber nicht falsch.

[4] In der Übung hatte ich an dieser Stelle die Bezeichnung i_0 verwendet, was zu häßlichen Doppelindizes führte.

[5] Dies ist die Induktionsvoraussetzung, mit anderen Worten: Der Satz gelte für $p - 1$. Alternativ könnte man die Induktionsvoraussetzung natürlich auch in einen eigenen Abschnitt verschieben.

wir $g_1 \leq g_2 \leq \ldots \leq g_p$ annehmen. Wäre $g_2 > 1$, so hätten wir

$$2p - 2 = \sum_{i=1}^{p} g_i \geq 1 + 2(p-1) = 1 + 2p - 2 > 2p - 2.$$

Also muss $g_1 = g_2 = 1$ sein. Hätten wir hingegen $g_i = 1$ für alle i, so wäre

$$2p - 2 = \sum_{i=1}^{p} g_i = p,$$

also $p = 2$. Damit muss es ein $j \geq 3$ geben, so dass $g_j \geq 2$ ist.

Setze $g_i' := g_i' - \delta_{ij}$ für $i = 2, \ldots, p$, wobei δ_{ij} das Kronecker-Delta ist.[6] Da $g_1 = 1$ ist und

$$\sum_{i=2}^{p} g_i' = \sum_{i=1}^{p} g_i - 2 = 2p - 4 = 2(p-1) - 2,$$

gibt es nach Induktionsvoraussetzung einen Baum B mit Ecken $e_2, \ldots, e_p$ mit den Graden $\operatorname{grad} e_i = g_i'$ für alle $i = 2, \ldots, p$. Also ist $B + e_1 + e_1 e_j$ ein Baum mit der gesuchten Eigenschaft $\operatorname{grad} e_i = g_i$ für alle i. $\square$

[6] Dass heißt $\delta_{ij} = 1$ falls $i = j$ und sonst $\delta_{ij} = 0$