Aufgabe 51. Seien $G_1 = (E_1, K_1)$ und $G_2 = (E_2, K_2)$ disjunkte Graphen, d. h. $E_1 \cap E_2 = \varnothing$.

(a) Weiter seien $\{x_1, \dots, x_r\} \subset E_1$, $\{y_1, \dots, y_r\} \subset E_2$ für ein $r \in \mathbb{N}$, $K' := \{\, x_i y_i \mid 1 \leq i \leq r \,\}$ und $G = (E, K)$ der Graph mit $E = E_1 \cup E_2$, $K = K_1 \cup K_2 \cup K'$. Zeigen Sie

$$(G) \geq \min(\sigma(G_1), \sigma(G_2), r)$$

und geben Sie ein Beispiel an mit $\sigma(G) > \min(\sigma(G_1), \sigma(G_2), r)$.

(b) Weiter sei K' eine beliebige Menge von r Verbindungskanten zwischen G_1 und G_2 und sei $G = (E, K)$ der Graph mit $E = E_1 \cup E_2$, $K = K_1 \cup K_2 \cup K'$. Zeigen Sie

$$\lambda(G) \geq \min(\lambda(G_1), \lambda(G_2), r)$$

und geben Sie ein Beispiel an mit $\lambda(G) > \min(\lambda(G_1), \lambda(G_2), r)$.

Beweis. (a) Sei $n := \sigma(G)$. Angenommen $n < \min(\sigma(G_1), \sigma(G_2), r)$. Dann existiert eine trennende Eckenmenge $M = \{e_1, \dots, e_n\}$ in G.

Fall 1. Ist $M \subset E_1$, so ist M eine trennende Eckenmenge von G_1. Nun hat aber jede trennende Eckenmenge von G_1 nach Definition mindestens $\sigma(G_1)$ Ecken, also $n \geq \sigma(G_1)$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme $n < \min(\sigma(G_1), \sigma(G_2), r) \leq \sigma(G_1)$.

Fall 2. Ist $M \subset E_2$, so verfahre analog zu Fall 1.

Fall 3. Es gibt zwei disjunkte Mengen und nicht-leere Mengen M_1 und M_2 mit $M_1 \subset E_1$ und $M_2 \subset E_2$, so dass $M = M_1 \cup M_2$. Dann ist $|M_1|, |M_2| < n$. Also trennt M_1 den Graphen G_1 nicht und M_2 trennt G_2 nicht.[1] Zudem kann weder M_1 alle $r > n$ Ecken aus $\{x_1, \dots, x_r\}$ noch M_2 alle $r > n$ Ecken aus $\{y_1, \dots, y_r\}$ enthalten. Damit zerfällt G_1 nicht, G_2 nicht und es gibt mindestens eine Kante $x_i y_i$ in $G - M$, weshalb $G - M$ zusammenhängend ist. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass es eine trennende Menge $M = \{e_1, \dots, e_n\} \subset E$ von G gibt.

In jedem Fall tritt also ein Widerspruch auf. Damit muss die Annahme falsch sein.

(b) Analog zu (a):[2]

Sei $n := \lambda(G)$. Angenommen $n < \min(\lambda(G_1), \lambda(G_2), r)$. Dann existiert eine trennende Kantenmenge $M = \{k_1, \dots, k_n\}$ in G.

Fall 1. Ist $M \subset K_1$, so ist M eine trennende Kantenmenge von G_1. Nun hat aber jede trennende Kantenmenge von G_1 nach Definition mindestens $\lambda(G_1)$ Kanten, also $n \geq \lambda(G_1)$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme $n < \min(\lambda(G_1), \lambda(G_2), r) \leq \lambda(G_1)$.

Fall 2. Ist $M \subset K_2$, so verfahre analog zu Fall 1.

Fall 3. Es gibt zwei disjunkte Mengen und nicht-leere Mengen M_1 und M_2 mit $M_1 \subset K_1$, $M_2 \subset K_2$ und $M' \subset K'$, so dass $M = M_1 \cup M_2 \cup M'$. Dann ist $|M_1|, |M_2| < n$. Also trennt M_1 den Graphen G_1 nicht und M_2 trennt G_2 nicht.[3] Zudem kann M' nicht alle $r > n$ Kanten aus K' enthalten. Damit zerfällt G_1 nicht, G_2 nicht und es gibt mindestens eine Kante $x_i y_i$ in $G - M$, weshalb $G - M$ zusammenhängend ist. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass es eine trennende Menge $M \subset K$ von G gibt.

[1] Nach Voraussetzung ist ja $n < \min(\sigma(G_1), \sigma(G_2), r)$.

[2] Die geänderten Stellen sind rot hervorgehoben.

[3] Nach Voraussetzung ist ja $n < \min(\lambda(G_1), \lambda(G_2), r)$.

In jedem Fall tritt also ein Widerspruch auf. Damit muss die Annahme falsch sein.

□

Nun noch die Beispiele für $\sigma(G) > \min(\sigma(G_1), \sigma(G_2), r)$ bzw. $\lambda(G) > \min(\lambda(G_1), \lambda(G_2), r)$, die also zeigen, dass wir die Aussagen ohne weitere Annahmen nicht verbessern können.

Beispiel. (a) Im Graphen G aus Abbildung 1 mit $E_1 = \{x_1, x_2, u\}$, $E_2 = \{y_1, y_2, v\}$ gilt $\sigma(G_1) = 1 = \sigma(G_2)$ ($G_1 - u$ und $G_2 - v$ haben jeweils zwei Komponenten) und $r = 2$, also $\min(\sigma(G_1), \sigma(G_2), r) = 1$, aber $\sigma(G) = 2$ ($G - u - v$ hat zwei Komponenten).

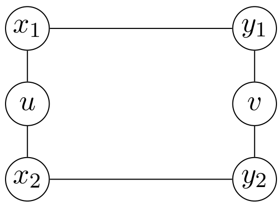

Abbildung 1: G

(b) Ebenso genügt es aus dem Graphen in Abbildung 1 die Kanten x_1y_1 und x_2y_2 zu entfernen um den Graphen in zwei Komponenten zu zerlegen. Da der Graph ein Kreis ist genügt eine Kante offensichtlich nicht. Also ist $\lambda(G) = 2$. Sowohl G_1, als auch G_2 zerfallen jedoch durch das Entfernen von nur einer Kante (x_1u bzw. y_1v) in zwei Komponenten, also ist $\min(\lambda(G_1), \lambda(G_2), r) = 1$.