10. Übung Graphentheorie WS2014/15

Aufgabe 53. Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender, schlichter Graph, K' eine minimale trennende Kantenmenge in G und C ein Kreis in G. Zeigen Sie: K' und C haben eine gerade Anzahl gemeinsamer Kanten.

Beweis. Sei E_C die Menge der Ecken und K_C die Menge der Kanten auf C. Zudem habe $G - K'$ die Komponenten $G_1 = (E_1, K_1)$ und $G_2 = (E_2, K_2)$.[1]

Wäre $K' \cap K_1 \neq \varnothing$ oder $K' \cap K_2 \neq \varnothing$, so könnte man diese gemeinsamen Kanten aus K' entfernen und erhielte eine kleinere trennende Kantenmenge. Nach Voraussetzung ist K' aber minimal, weshalb es eine solche nicht geben kann.

Fall 1. Ist $E_C \subset E_1$ oder $E_C \subset E_2$, so enthält K_C also keine Kante von K'. C und K' haben also 0 Kanten gemeinsam und die Behauptung ist erfüllt.

Fall 2. Der Kreis C beinhalte Ecken aus E_1 und aus E_2. Die Ecken von C seien $e_1, \dots, e_n$ in der Reihenfolge, in der sie einander entlang C folgen. O. B. d. A. können wir $e_1 \in E_1$ voraussetzen.[2] Laufen wir von e_1 aus den Kreis entlang, so können wir mehrere Wechsel von Ecken aus E_1 zu Ecken aus E_2 beobachten. Da wir jedoch zuletzt wieder bei e_1 ankommen müssen wir für jeden Wechsel von E_1 zu E_2 auch anschließend einen Wechsel von E_2 zurück zu E_1 sehen. Die Anzahl der Wechsel ist also gerade. Jeder dieser Wechsel entspricht genau einer Kante $e_i e_j \in K' \cap K_C$.[3] Die Anzahl der gemeinsamen Kanten ist damit gerade. □

Aufgabe 54. Sei $G = (E, K)$ ein schlichter Graph. Für beliebige $u, v \in E$ sei $d(u, v)$ die Länge eines kürzesten u-v-Weges in G. Zeigen Sie: Die Anzahl paarweise disjunkter Eckenmengen, die u und v trennen, ist höchstens gleich $d(u, v)$.

Beweis. Seien $u, v \in E$, $u \neq v$, zwei beliebige Ecken und sei $n := d(u, v)$ ihr Abstand. Es gibt also einen minimalen u-v-Weg W der Länge n, der also n Kanten und somit $n - 1$ innere Ecken hat. Wir können $W = ue_1, \dots, e_{n-1}v$ schreiben. Jede u-v-trennende Eckenmenge E' muss eine innere Ecke dieses minimalen Wegs beinhalten, sonst würden ja u und v noch durch W verbunden.

Hätten wir n (oder mehr) paarweise disjunkte u-v-trennende Eckenmengen $E_1, \dots, E_n$,[4] so müssen wir den $n - 1$ inneren Ecken n verschiedene trennende Eckenmengen E_i zuordnen. Nach dem Schubfachprinzip müssen dann aber einer Ecke e mindestens zwei Eckenmengen E_i, E_j zugewiesen werden. Also können n paarweise disjunkte u-v-trennende Eckenmengen nicht paarweise disjunkt sein. Es kann damit höchstens $n - 1 = d(u, v) - 1$ paarweise disjunkte u-v-trennende Eckenmengen geben. □

Aufgabe 56. Sei $n \in \mathbb{N}$, $G = (E, K)$ ein schlichter Graph mit $p \geq 2n$ Ecken. Zeigen Sie: Ist G ist n-fach zusammenhängend, dann gilt: Zu je zwei disjunkten Mengen $E_1, E_2 \subset E$ mit je n Elementen gibt es n disjunkte u-v-Wege mit $u \in E_1$ und $v \in E2$, die auch keine Endecke gemeinsam haben.

Beweis. Ergänze den Graphen um die Ecken s, z und die Kanten $K' = \{ su \mid u \in E_1 \} \cup \{ vz \mid v \in E_2 \}$ zu einem neuen Graphen $G' := G + s + z + K'$.

[1] Hätte $G - K_1$ mehr als zwei Komponenten, so wäre K_1 nicht minimal.
[2] Andernfalls vertausche die Bezeichnungen zyklisch.
[3] K' ist ja eine trennende Kantenmenge und C verbindet Ecken aus E_1 mit Ecken aus E_2.
[4] Dass heißt keine Ecke taucht in mehr als einer Eckenmenge E_i auf.

Der Graph G' ist genau dann n-fach zusammenhängend, wenn die kleinste trennende Eckenmenge n Ecken enthält. Sei $\widetilde{E} \subset E$ eine beliebige $n-1$-elementige Teilmenge. Nach Voraussetzung ist $G - \widetilde{E}$ zusammenhängend. Es muss also s oder z in $G' - \widetilde{E}$ eine isolierte Ecke sein. Nach Voraussetzung ist aber $\operatorname{grad} s = \operatorname{grad} z = n > n-1$. Somit muss auch $G' - \widetilde{E}$ zusammenhängend sein. Also ist G' ebenfalls n-fach zusammenhängend.

Es gibt also mindestens n disjunkte s-z-Wege in G'. Lassen wir von diesen Wegen jeweils die Ecken s und z weg, so erhalten wir n vollständig disjunkte Wege, deren erste Ecke in E_1 und deren letzte Ecke in E_2 liegt, was zu zeigen war. □

Aufgabe 57. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, $G = (E, K)$ ein n-fach zusammenhängender schlichter Graph, $e_1, e_2, \ldots, e_n \in E$. Zeigen Sie: Es gibt einen Kreis in G, der $e_1, e_2, \ldots, e_n$ als Ecken enthält.

Beweis. Sei G n-fach zusammenhängend mit $n \geq 2$. Dann gibt es nach Korollar 4.2.6.1 (b) zu je zwei Ecken $u, v \in E$ mindestens n disjunkte u-v-Wege $W_1, \ldots, W_n$. Dann ist $W_1 + W_2$ ein Kreis durch u und v. Es gibt also Kreise in G.

Sei C ein Kreis in G mit maximaler Eckenzahl aus $\{e_1, \ldots, e_n\}$. O. B. d. A. können wir $C = e_1 e_2 e_3 \ldots e_\ell e_1$ schreiben. Nehmen wir an, ℓ wäre kleiner als n und somit $e_{\ell+1}$ keine Ecke von C.[5]

Da G n-fach zusammenhängend ist, existieren n disjunkte e_1-$e_{\ell+1}$-Wege in G. Da $n > \ell$ ist, enthält mindestens einer dieser Wege, etwa W_1, keine der Ecken $e_2, \ldots, e_\ell$.[6] Analog gibt es einen e_2-$e_{\ell+1}$-Weg W_2 in G, der keine der Ecken $e_1, e_3, e_4, \ldots, e_\ell$ enthält.

Sei $C' := C - e_1 e_2 + W_1 + W_2$. Dann ist C' ein Kreis, der die Ecken $e_1, \ldots, e_\ell, e_{\ell+1}$ enthält, also mehr dieser Ecken als C, aber wir hatten C als maximal Vorausgesetzt. Dies ist ein Widerspruch und es folgt $\ell = n$. □

[5] Mit anderen Worten: indirekter Beweis.

[6] Schubfachprinzip!