11. Übung Graphentheorie WS2014/15

Aufgabe 60. Sei $G = (E, K)$ ein Graph ohne Kreise mit ungerader Länge, $a \in E$ beliebig. Weiter sei $d(u, v)$ der Abstand von $u, v \in E$, d. h. die Länge eines kürzesten u-v-Weges in G, und

$$E_1 := \{\, e \in E \mid d(a, e) \text{ gerade} \,\}, \qquad E_2 := \{\, e \in E \mid d(a, e) \text{ ungerade} \,\}.$$

Zeigen Sie: G ist ein bipartiter Graph mit zugehörigen Eckenmengen E_1 und E_2.

Beweis. Angenommen G wäre nicht bipartit. Dann gäbe es eine Kante $k = uv \in K$ mit $u, v \in E_1$ (oder $u, v \in E_2$). Sei $e_0 := e'_0 := a$, $W_1 := e_0 e_1 \dots e_n u$ ein kürzester a-u- und $W_2 := e'_0 e'_1 \dots e'_m v$ ein kürzester a-v-Weg. Wegen $u, v \in E_1$ (bzw. $u, v \in E_1$) haben beide Wege eine gerade (bzw. ungerade) Länge. Sei e_i die letzte Ecke auf W_1, die auch auf W_2 liegt. Dann ist $e_i e_{i+1} \dots e_n u v e'_m e'_{m-1} \dots e_i$ ein Kreis in G. Da sowohl m, als auch n ungerade (bzw. gerade) sind, ist dies ein Kreis ungerade Länge. Nach Voraussetzung gibt es solche in G aber nicht. Also war die Annahme $u, v \in E_1$ (bzw. $u, v \in E_2$) falsch, also G doch bipartit. □

Aufgabe 61. (a) Sei $G = (E, K)$ ein bipartiter Graph mit p Ecken und q Kanten. Ziegen Sie

$$q \leq \frac{p^2}{4}.$$

(b) Sei $G = (E, K)$ ein r-partiter Graph mit p Ecken und q Kanten und seien $i, j \in \mathbb{N}_0$ gegeben mit $p = i \cdot r + j$ und $j < r$. Zeigen Sie, dass G höchstens so viele Kanten hat wi

$$K_{\underbrace{i+1, \dots, i+1}_{j \text{ mal}}, \underbrace{i, \dots, i}_{r-j \text{ mal}}}.$$

Geben Sie die maximale Kantenzahl an.

Beweis. (a) Ist $E = E_1 \cup E_2$ bipartit (keine Kanten innerhalb von E_1 und keine Kanten innerhalb von E_2) mit $n = |E_1|$, also $|E_2| = p - n$, so ist offensichtlich die Anzahl der Kanten von G nicht größer als dies Anzahl der Kanten des vollständigen bipartiten Graphen $K_{n,p-n}$.

Nehmen wir also o. B. d. A. $G = K_{n,p-n}$ an. Von jeder der n Ecken in E_1 gehen $p - n$ Kanten aus (eine zu jeder Ecke in E_2); von jeder der $p - n$ Ecken in E_2 gehen n Kanten aus. Nach Handshaking-Lemma ist also $q = \frac{1}{2}(n \cdot (p - n) + (p - n) \cdot n) = -n^2 + np =: f(n)$.

Lassen wir statt $n \in \mathbb{N}$ beliebige $x \in \mathbb{R}$ zu, so wird der Ausdruck allenfalls größer. Nun können wir das Maximum der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + px$ mit den Mitteln der Analysis bestimmen. Offensichtlich ist $f'(x) = -2x + p$ genau dann Null, wenn $x = \frac{p}{2}$ ist. Es handelt sich um eine nach unten geöffnete Parabel, weshalb es an der Stelle $x = \frac{p}{2}$ ein Maximum geben muss. Es ist also

$$q = -n^2 + np \leq -x^2 + px = f(x) \leq f\left(\frac{p}{2}\right) = -\frac{p^2}{4} + p\frac{p}{2} = \frac{p^2}{4},$$

was zu zeigen war.

(b) Auch hier können wir o. E.[1] davon Ausgehen, dass G ein *vollständiger* r-partiter Graph mit den entsprechenden Eckenmengen $E_1, \dots, E_r$ ist. Weiterhin sei $p_i := |E_i|$ für alle $1 \leq i \leq r$.

[1] Ohne Einschränkung

O. B. d. A. können wir ferner $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_r$ annehmen. Wir müssen nun zeigen, dass die Anzahl der Kanten maximal wird, wenn die p_i sich möglichst wenig voneinander unterschieden, dass also $p_1 - p_r \leq 1$ ist. Ist dies der Fall, so kann nur noch $p_1, \ldots, p_j = i+1$ und $p_{j+1}, \ldots, p_r = i$ sein.

Nehmen wir nun an, G sei der r-partite Graph mit p Ecken, der die höchste Anzahl von Kanten hat und nehmen wir an, dass $p_1 > i+1$ ist.[2] Dann hat jede Ecke in E_1 Grad $p - p_1 < p - (i+1)$. Da $j < r$ ist muss $p_r \leq i$ sein. Sei $\widetilde{q}$ die Anzahl der Kanten zwischen den Ecken in $E_2, \ldots, E_{r-1}$. Dann hat G

$$\begin{aligned} q &= p_1(p_2 + p_3 + \cdots + p_r) + p_r(p_2 + p_3 + \cdots + p_{r-1}) + \widetilde{q} \\ &= p_1 p_r + (p_1 + p_r)(p_2 + p_2 + \cdots + p_{r-1}) + \widetilde{q} \end{aligned}$$

Kanten. Konstruieren wir nun einen neuen Graphen G', indem wir eine Ecke aus E_1 entfernen und in E_r einfügen. Sei also $G' := K_{p_1-1, p_2, \ldots, p_r+1}$. Dieser Graph hat

$$\begin{aligned} q' &= (p_1 - 1)(p_r + 1) + (p_1 - 1 + p_r + 1)(p_2 + p_3 + \cdots +_r) + \widetilde{q} \\ &= p_1 p_r + p_1 - p_r - 1 + (p_1 - 1 + p_r + 1)(p_2 + p_3 + \cdots +_r) + \widetilde{q} \\ &= q + p_1 - p_r - 1 \end{aligned}$$

Kanten. Nach Voraussetzung ist $p_1 > i+1$ und $p_r \leq i$, also

$$p - 1 - p_r - 1 \geq (i+2) - i - i = 1,$$

dass heißt G' hat mindestens eine Kante mehr als G. Widerspruch zur Annahmen, dass G maximal ist. Daher kann ein r-partiter Graph G nur dann maximal sein, wenn $i \leq p_1, \ldots, p_r \leq i+1$ ist. G hat also die behauptete Form.

Damit ist die maximale Kantenzahl eines r-partiten Graphen mit p Ecken

$$\begin{aligned} & j(i+1)((i+1)(j-1) + (r-j)i) + (p-j)i((i+1)j + (r-j-1)i) \\ &= (ij + j)(ij - i + j - 1 + ri - ij) + (pi - ij)(ij + j + ri - ij - i) \\ &= (ij + j)(-i - 1 + \underbrace{ri + j}_{=p}) + (pi - ij)(\underbrace{j + ri}_{=p} - i) \\ &= \; - i^2 j - ij + pij - ij - j + p^2 i - pi^2 - pij + i^2 j \\ &= p^2 i - pi^2 - 2ij - j, \end{aligned}$$

denn es gibt j Komponenten mit jeweils $i+1$ Ecken, welche jeweils zu allen Ecken in den anderen Komponenten benachbart sind und $p - j$ Komponenten mit jeweils i Ecken, die ebenfalls zu sämtlichen Ecken in den anderen Komponenten benachbart sind. $\square$

Aufgabe 62. Sei $G = (E, K)$ ein schlichter Graph.

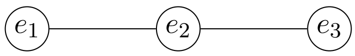
(a) Zeigen oder widerlegen Sie: Jede überdeckende Eckenmenge $E' \subset E$ von G enthält eine minimale überdeckende Eckenmenge $E'' \subset E'$.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie: Jede unabhängige Kantenmenge $K' \subset K$ von G ist in einer maximalen unabhängigen Kantenmenge $K'' \supset K'$ enthalten.

[2] Indirekter Beweis

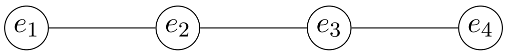
(c) Ziegen Sie: $\beta(G) \geq \delta(G)$.

Beweis. (a) Gegenbeispiel:



Offenbar ist $E' = \{e_1, e_3\}$ eine überdeckende Eckenmenge,[3] doch die einzige minimale Eckenüberdeckung ist $E'' = \{e_2\} \not\subset E'$.

(b) Gegenbeispiel:



$K' = \{e_2e_3\}$ ist offensichtlich eine unabhängige Kantenmenge,[4] aber die einzige maximale unabhängige Kantenmenge in G ist $K'' = \{e_1e_2, e_3e_4\} \not\supset K'$.

(c) Beweis durch vollständige Induktion nach p.

IA. $p = 1 \implies G = K_1$. Offensichtlich ist $\beta(K_1) = \delta(K_1) = 0$.

$p = 2, q = 0 \implies \beta = \delta = 0$.[5]

$p = 2, q = 1 \implies \beta = \delta = 1$.

IV. Für alle Graphen G' mit $p' < p$ Ecken gelte $\beta \geq \delta$.

IS. Sei $G = (E, K)$ ein Graph mit $p \geq 3$ Ecken und $e \in E$ eine Ecke von minimalem Grad.

Fall 1. Es gibt eine minimale Eckenüberdeckung E_1 von G mit $e \in E_1$.

Sei $G' := G - e = (E', K')$. Dann hat G' genau $p - 1$ Ecken, weshalb, nach Induktionsvoraussetzung, $\beta(G') > \delta(G')$ ist.

Der Grad jeder Ecke e' von G' ist höchstens um 1 kleiner als der Grad dieser Ecken in G, da von jeder dieser Ecken höchstens eine Kante $e'e$ entfernt wird (G ist ja schlicht). Also ist $\delta(G') \geq \delta(G) - 1$.

Dann ist $E_1' := E_1 \setminus \{e\}$ eine minimale Eckenüberdeckung von G', da mit e auch all emit e inzidenten Kanten entfernt wurden. Ist $r = |E_1|$, so haben wir also $|E_1'| = r - 1$. Also ist

$$\beta(G) = r = \beta(G') + 1 \geq \delta(G) - 1 + 1 = \delta(G).$$

Fall 2. Gibt es keine minimale Eckenüberdeckung E_1, die e enthält, so muss, damit alle zu e inzidenten Kanten abgedeckt sind, E_1 alle Nachbarn von e enthalten. Nach Voraussetzung sind dies $\delta(G)$ Stück. Es ist also $\beta(G) = |E_1| \geq \delta(G)$. $\square$

Aufgabe 63. Sei $G = (E, K)$ ein vollständiger r-partiter Graph mit p Ecken. Zeigen Sie:

(a) $\beta(G) = \delta(G) = \sigma(G) = \lambda(G)$.

(b) G ist genau dann Hamiltonsch, wenn $p \leq 2\beta(G)$ ist.

[3] D. h. eines der Enden jeder Kante von G ist in E' enthalten.

[4] D. h. keine zwei Kanten aus K' haben eine gemeinsame Ecke, K' ist also ein Matching.

[5] Der Einfachheit halber lasse ich ab jetzt die Argumente von β und δ weg, sofern klar ist, um welchen Graphen es geht.

Beweis. (a) Sei $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_r$ die Eckenpartition, E_i habe die Eckenzahl p_i und es gelte $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_r$.

Für jedes $e \in E_i$ gilt $\operatorname{grad} e = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} p_j \geq p - p_r \implies \delta(G) \geq p - p_r$. Für $i = r$ gilt Gleichheit, also $\delta(G) = p - p_r$.

$E' := E \setminus E_r$ ist eine Eckenüberdeckung, da jede Kante höchstens eine Endecke in E_r hat, also inzident zu mindestens einer Ecke aus E' ist. Damit ist $\beta(G) \leq p - r = \delta(G)$. Laut Aufgabe 62 (c) ist stets $\beta(G) \geq \delta(G)$, womit wir $\beta(G) = \delta(G)$ erhalten.

Es ist zudem $\sigma(G) \leq \delta(G)$: Nehmen wir an, dass $\sigma(G) > \delta(G)$ wäre. Sei E' eine trennende Eckenmenge mit $\sigma(G)$ Elementen und $E'' := E \setminus E'$. Dann hat E' weniger als $p - p_r$ Elemente und somit E'' höchstens $p - (p - p_r - 1) = p_r + 1$. Also enthält E'' Ecken aus mindestens zwei der Eckenmengen $E_1, \ldots, E_r$, etwa E_i und E_j. Sei $u \in E_i$ und $v \in E_j$. Dann sind u und v benachbart in G, denn G ist vollständig r-partit.

Sei $w \in E''$ beliebig. Ist $w \notin E_i$, so ist w mit u verbunden. Ist jedoch $w \in E_i$, so ist w zu v benachbart und der Weg wvu liegt in E''. Da w beliebig gewählt war ist $G - E'$ zusammenhänged, E' also keine trennende Eckenmenge. Die widerspricht der Voraussetzung, weshalb die Annahme $\sigma(G) > \delta(G)$ falsch sein muss.

Nun gilt bekanntermaßen $\sigma(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$. Damit folgt die Behauptung.

(b) Sei zunächst G Hamiltonsch und C ein Hamilton-Kreis in G. Die Ecken von E_r sind nicht benachbart, dass heißt entlang C muss zwischen je zwei Ecken aus E_r mindestens eine Ecke aus $E \setminus E_r$ liegen, weshalb $E \setminus E_r$ mindestens p_r Elemente haben muss. Daher ist $p \geq 2p_r$.

Nach Aufgabenteil (a) gilt $\beta(G) = \delta(G) = p - p_r$, also $p_r = p - \beta(G)$. Dies impliziert $p \geq 2(p - \beta(G))$, was äquivalent zu $p \leq 2\beta(G)$ ist.

Sei nun umgekehrt $p \leq 2\beta(G)$. Mit $\beta(G) = \delta(G) = p - p_r$ folgt

$$p \geq 2p_r \implies p - p_r \geq p_r \implies \sum_{i=1}^{r-1} p_i \geq p_r.$$

Laut Satz 4.3.3 bedeutet das, dass G Hamiltonsch ist. □

Aufgabe 64. Sei $G = (E_1 \cup E_2, K)$ bipartit und der Grad jeder Ecke von E_1 mindestens so groß wie der Grad jeder Ecke von E_2. Zeigen Sei: Es gibt ein vollständiges Matching von E_1 nach E_2.

Beweis. Nehmen wir an, es gebe kein vollständiges Matching von E_1 nach E_2. Nach dem Heiratssatz von Hall gibt es eine Teilmenge $S \subset E_1$, so deren Nachbarschafsmenge $N(S)$ weniger Elemente als S hat.

Wir definieren den minimalen Grad einer Eckenmenge S durch $\delta(S) := \min\{ \operatorname{grad} e \mid e \in S \}$.

Von S gehen $q_s = \sum_{e \in S} \operatorname{grad} e$ Kanten nach $N(S)$, denn es gibt keine Kante zwischen Ecken von S, da $S \subset E_1$ und G bipartit ist. Ist r die Anzahl der Elemente von S, dann folgt mit $\operatorname{grad} e \geq \delta(S)$

$$q_s \geq r \cdot \delta(S).$$

Hat $N(S)$ s Elemente, dann ist der durchschnittliche Eckengrad in $N(S)$

$$\frac{r \cdot \delta(S)}{s} > \delta(S),$$

da $r > s$ ist nach Voraussetzung für S. Es gibt also mindestens eine Ecke e' in $N(S)$ mit $\operatorname{grad} e' > \delta(S)$. Sei $e \in S$ so gewählt, dass $\operatorname{grad} e = \delta(S)$ ist. Dann ist $\operatorname{grad} e' > \operatorname{grad} e$. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung der Aufgabe. Also muss es doch ein vollständiges Matching geben. $\square$