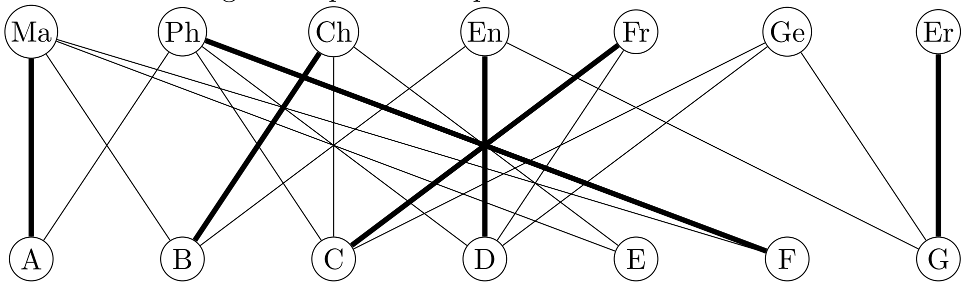
12. Übung Graphentheorie WS2014/15

Aufgabe 65. Sei G der folgende bipartite Graph

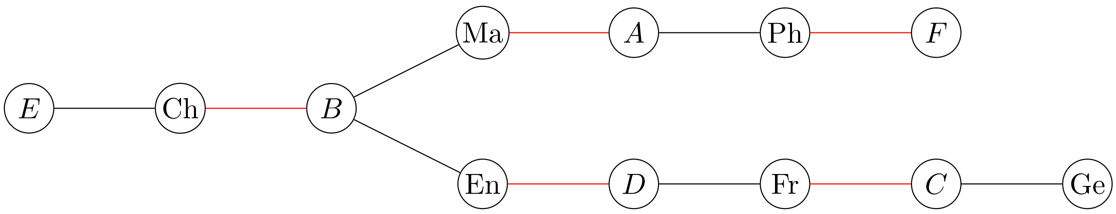


$E_1 = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ und $E_2 = \{\mathrm{Ma}, \mathrm{Ph}, \mathrm{Ch}, \mathrm{En}, \mathrm{Fr}, \mathrm{Ge}, \mathrm{Er}\}$. Die fett gedruckten Kanten stellen das gegebene Matching M dar. Bestimmen Sie, ausgehend von M ein maximales Matching mit dem Algorithmus nach Satz 4.5.7.

Lösung. M ist offenbar ein gesättigtes Matching.[1] Wir beginnen den Algorithmus mit der Anfangsecke $e = E$.[2] Dann ist $S_1 = \{E\}$, $S_2 = \varnothing$, $N(S_1) = \{\mathrm{Ch}, \mathrm{Ma}\} \neq S_2$.

- Wähle $y_1 = \mathrm{Ch}$. Dann ist $x_1 = E$, $z_1 = B$, $S_1 = \{E, B\}$, $S_2 = \{\mathrm{Ch}\}$, $N(S_1) = \{\mathrm{Ch}, \mathrm{Ma}, \mathrm{En}\} \neq S_2$.
- Wähle $y_2 = \mathrm{Ma}$. Dann ist $x_2 = B$, $z_2 = A$, $S_1 = \{E, B, A\}$, $S_2 = \{\mathrm{Ch}, \mathrm{Ma}\}$, $N(S_1) = \{\mathrm{Ch}, \mathrm{Ma}, \mathrm{En}, \mathrm{Ph}\} \neq S_2$.
- Wähle $y_3 = \mathrm{En}$. Dann ist $x_3 = B$, $z_3 = D$, $S_1 = \{E, B, A, D\}$, $S_2 = \{\mathrm{Ch}, \mathrm{Ma}, \mathrm{En}\}$, $N(S_1) = \{\mathrm{Ch}, \mathrm{Ma}, \mathrm{En}, \mathrm{Ph}, \mathrm{Fr}, \mathrm{Ge}\} \neq S_2$.
- Wähle $y_4 = \mathrm{Ph}$. Dann ist $x_4 = A$, $z_4 = F$, $S_1 = \{E, B, A, D, F\}$, $S_2 = \{\mathrm{Ch}, \mathrm{Ma}, \mathrm{En}, \mathrm{Ph}\}$, $N(S_1) = \{\mathrm{Ch}, \mathrm{Ma}, \mathrm{En}, \mathrm{Ph}, \mathrm{Fr}, \mathrm{Ge}\} \neq S_2$.
- Wähle $y_5 = \mathrm{Fr}$. Dann ist $x_5 = D$, $z_5 = C$, $S_1 = \{E, B, A, D, F, C\}$, $S_2 = \{\mathrm{Ch}, \mathrm{Ma}, \mathrm{En}, \mathrm{Ph}, \mathrm{Fr}\}$, $N(S_1) = \{\mathrm{Ch}, \mathrm{Ma}, \mathrm{En}, \mathrm{Ph}, \mathrm{Fr}, \mathrm{Ge}\} \neq S_2$.
- Wählen wir nun $y_6 = \mathrm{Ge}$ und $x_6 = C$, so existiert kein geeignetes z_6.

Damit ist der Algorithmus beendet. Der hierbei konstruierte gesättigte M-alternierende Wurzelbaum T ist, wobei die roten und nur die roten Kanten zu unserem ursprünglichem Matching M gehören.

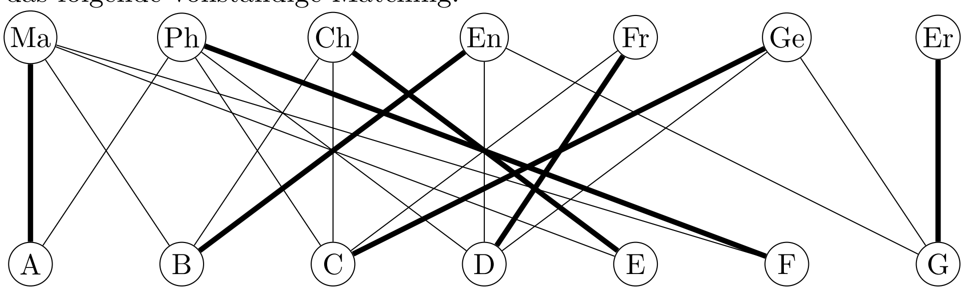


Da weder E noch Ge zum Matching gehören haben wir den M-erweiternden Weg $E, \mathrm{Ch}, B, \mathrm{En}, D, \mathrm{Fr}, C, \mathrm{Ge}$ gefunden. Definiere also ein neues Matching M' durch

$$M' := M \setminus \{B\mathrm{Ch}, D\mathrm{En}, C\mathrm{Fr}\} \cup \{E\mathrm{Ch}, B\mathrm{En}, D\mathrm{Fr}, C\mathrm{Ge}\}.$$

[1] Dass heißt, es gibt keine Kante $k \in K \setminus M$, so dass $M \cup \{k\}$ wieder ein Matching ist.
[2] Wir hätten hier auch $e = \mathrm{Ge}$ wählen können. Wichtig ist nur, dass e zu keiner Kante $k \in M$ inzident ist.

M' ist das folgende vollständige Matching:



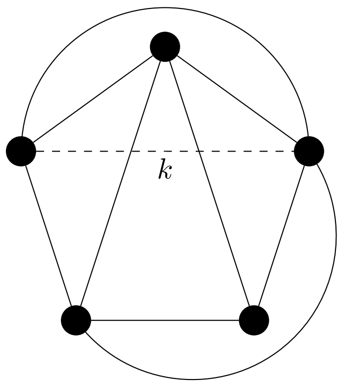
Aufgabe 67. (a) Sei $G = K_5$ oder $G = K_{3,3}$, und k eine beliebige Kante von G. Zeigen Sie: $G - k$ ist planar.

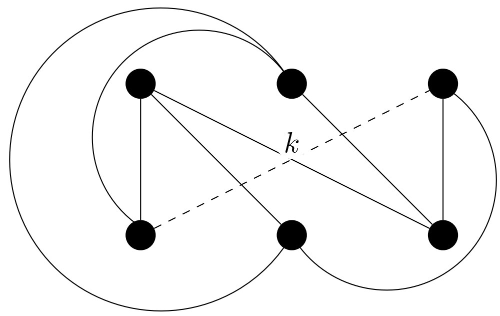
(b) Gilt das auch für $G = K_p$ mit $p \geq 6$ oder $G = K_{m,n}$ mit $m \geq 3$ und $n \geq 4$?

Beweis. (a) Sei k eine beliebige Kante von K_5. Der Graph $K_5 - k$ hat genau 5 Ecken, kann also keine Unterteilung des $K_{3,3}$ enthalten. Ebenso ist klar, dass ein echter Teilgraph von K_5 keine Unterteilung des K_5 enthalten kann. Damit ist $K_5 - k$ nach dem Satz von Kuratowski planar.

Ist k eine beliebige Kante von $K_{3,3}$, so enthält $K_{3,3} - k$ genau $\frac{3 \cdot 6}{2} - 1 = 8$ Kanten, der K_5 hat aber schon $\frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ Kanten. Also kann $K_{3,3} - k$ keinen Teilgraphen haben, der zu K_5 oder $K_{3,3}$ isomorph ist. Also ist auch $K_{3,3} - k$ nach Kuratowski planar.

Man kann jedoch auch ganz elementar zeigen, dass $K_5 - k$ und $K_{3,3} - k$ planar sind, indem man einfach eine ebene Darstellung der Graphen angibt. Aufgrund der Symmetrie der beiden Graphen ist es unerheblich welche Kante k man auswählt.





Die Kante k ist jeweils gestrichelt eingezeichnet. □

(b) Für $p \geq 6$ können wir einen zu K_{p-1} isomorphen Teilgraph von K_p durch $K_p - e$ für eine beliebige Ecke e von K_p konstruieren. Da $K_p - e$ ein Teilgraph von $K_p - k$ für jede mit e inzidente Kante k ist, enthält $K_p - k$ stets einen zu K_{p-1} isomorphen Teilgraphen. Für $p \geq 6$ können wir also nicht durch das Weglassen einer Kante aus K_p einen planaren Graphen erhalten.

Sei uv eine beliebige Kante von $K_{m,n}$. O. B. d. A. sei $u \in E_1$ und $v \in E_2$, wobei $E = E_1 \cup E_2$ mit $m = |E_1|$ und $n = |E_2|$ ist. Dann ist $K_{m,n} - v$ ein Teilgraph von $K_{m,n} - uv$ und ist isomorph zu $K_{m,n-1}$. Dieser enthält dann wegen $m \geq 3$ und $n \geq 4$ den $K_{3,3}$ als Teilgraph, ist also nicht planar. Auch die vollständigen bipartiten Graphen mit $K_{m,n}$ mit $m \geq 3$ und $n \geq 4$ können wir nicht durch das Entfernen einer Kante planar machen.

Aufgabe 69. Sei G ein schlichter Graph mit $p \geq 11$ Ecken. Zeigen Sie: Es können nicht G und $\overline{G}$ planar sein.

Beweis. Angenommen G und $\overline{G}$ wären beide planar. Aus der Definition des Komplements folgt, dass $q + q' = \binom{p}{2}$ ist, wenn q die Anzahl der Kanten von G und q' die Anzahl der Kanten von $\overline{G}$ ist. Weiterhin bleibt bei der Bildung des Komplements von G die Anzahl der Ecken gleich.

Nach Satz 5.2.7 (c) ist zudem $q \leq 3p - 6$ und $q' \leq 3p - 6$. Also haben wir

$$\binom{p}{2} \leq 6p - 12 \implies \frac{p(p-1)}{2} \leq 6p - 2 \implies p^2 - 13p + 24 \leq 0.$$

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^2 - 13x + 24$ hat genau zwei Nullstellen, nämlich

$$x_{1,2} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{13^2}{4} - 24} = \frac{13}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{73}.$$

$f(x) \leq 0$ gilt für alle $x \in [x_1, x_2]$, wenn wir die Nullstellen so benennen, dass $x_1 < x_2$ ist. Nun ist $x_2 \approx 10.772$. Für alle $x \geq 11$ ist daher $f(x) > 0$. Die Ungleichung ist also für kein $p \geq 11$ erfüllt. Damit können nicht sowohl G, als auch $\overline{G}$ planar sein. □

Aufgabe 70. Sei G ein schlichter zusammenhängender ebener Graph, s_i die Anzahl der Länder der zugehörigen Landkarte mit i Kanten. Zeigen Sie:

(a) Ist G 3-regulär, dann gilt

$$12 = 3s_3 + 2s_4 + s_5 - \sum_{i=7}^{\infty}(i-6)s_i.$$

(b) Gilt $\delta(G) \geq 3$, dann gibt es mindestens ein Land mit höchstens 5 Kanten.

(c) Gilt die Behauptung aus (b) auch, wenn $\delta(G) \leq 2$ ist?

Beweis. (a) Offensichtlich muss in einem schlichten Graphen jedes Land mindestens 3 Kanten und damit auch 3 Ecken haben.

Zählen der Ecken bzw. Kanten je Land und Summieren liefert

$$2q = \sum_{i=3}^{\infty} i s_i = 3p, \tag{1}$$

da G 3-regulär ist.[3]

Die Euler-Formel für zusammenhängende ebene Graphen besagt, dass $p - q + s = 2$ ist, also $6p - 6q + 6s = 12$. Nun nutzen wir (1) und erhalten

$$2\sum_{i=3}^{\infty} i s_i - 3\sum_{i=3}^{\infty} i s_i + 6\sum_{i=3}^{\infty} s_i = 12 \implies \sum_{i=3}^{\infty}(6-i)s_i = 12.$$

Daraus folgt die Behauptung.[4] □

[3] Andernfalls gäbe es Ecken, die zu mehr oder weniger als 3 Ländern gehören.

[4] Vorfaktoren von s_3 bis s_6 in dieser Summe sind $6-3=3$, $6-4=2$, $6-5=1$ und $6-6=0$.

(b) Ist $\delta(G) \geq 3$, so ist $\sum_{i=3}^{\infty} i s_i \geq 3p$, woraus wir wie bei Aufgabenteil (a)

$$\sum_{i=3}^{\infty} (6-i) s_i \geq 12$$

erhalten. Die Vorfaktoren aller s_i mit $i \geq 7$ sind negativ, weshalb die linke Seite der Ungleichung negativ wäre, wenn es keine Länder mit 3, 4 oder 5 Kanten gäbe. Es liegt in diesem Fall offenbar ein Widerspruch vor, womit wir gezeigt haben, dass es mindestens ein Land mit höchstens 5 Kanten gibt. $\square$

(c) Ein Kreis der Länge 6 ist ein Gegenbeispiel, da die zugehörige Landkarte genau zwei Länder besitzt, die beide Sechsecke sind.