Aufgabe 20. Sei $X = \{x_1, \dots, x_{d+1}\} \subset \mathbb{E}^d$ und je $d+1$ der Punkte sind affin unabhängig. Zeigen Sie: Es gibt genau eine Zerlegung von X in Teilmengen $Y, Z \subset X$ mit

$$Y \cup Z = X, \qquad Y \cap Z = \varnothing, \qquad (\operatorname{conv} Y) \cap (\operatorname{conv} Z) \neq \varnothing.$$

Lösung.

Existenz. Nach dem Satz von Radon gibt es eine Zerlegung Y, Z von X, d.h. es gilt $Y \cap Z = \varnothing$ und $Y \cup Z = X$, mit $\operatorname{conv} Y \cap \operatorname{conv} Z \neq \varnothing$.

Eindeutigkeit. O. B. d. A. sei $\{x_1, \dots, x_m\} = Y$ und $\{x_{m+1}, \dots, x_{d+2}\} = Z$ (andernfalls können wir ja die x_i geeignet umbenennen). Wegen $\operatorname{conv} Y \cap \operatorname{conv} Z \neq \varnothing$ gibt es also ein $x \in \operatorname{conv} Y \cap \operatorname{conv} Z$.

Wir können dieses x als Konvexkombination von $x_1, \dots, x_m$ und als Konvexkombination von $x_{m+1}, \dots, x_{d+2}$ schreiben. Seien also $\alpha_i, \beta_j \in [0, \infty)$, $1 \leq i \leq m$, $m+1 \leq j \leq d+2$, gegeben mit

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = x = \sum_{j=m+1}^{d+2} \beta_j x_j \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 = \sum_{j=m+1}^{d+2} \beta_j.$$

Wir lösen beide Gleichungen nach $\beta_{d+2} x_{d+2}$ bzw. β_{d+2} auf und erhalten

$$\beta_{d+2} x_{d+2} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i + \sum_{j=m+1}^{d+1} (-\beta_j) x_j \quad \text{und} \quad \beta_{d+2} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i + \sum_{j=m+1}^{d+1} (-\beta_j). \tag{1}$$

Annahme: $\beta_{d+2} = 0$. Dann ist natürlich $\beta_{d+2} x_{d+2} = 0$ und wir erhalten

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i + \sum_{j=m+1}^{d+1} (-\beta_j) x_j \quad \text{und} \quad 0 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i + \sum_{j=m+1}^{d+1} (-\beta_j).$$

Sei $X' := X \setminus \{x_{d+2}\} = \{x_1, \dots, x_{d+1}\}$ die Menge der anderen Punkte.

Nach Voraussetzung ist jede $(d+1)$-elementige Teilmenge von X affin unabhängig, dass heißt

$$\sum_{k=1}^{d+1} \lambda_k x_k = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{d+1} \lambda_1 = 0$$

impliziert $\lambda_k = 0$ für alle $k = 1, \dots, d+1$, womit hier $\alpha_i = 0$ für $i = 1, \dots, m$ und $\beta_j = 0$ für $j = m+1, \dots, d+1$ folgt. Damit ist aber $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 0$, was aber nach Voraussetzung 1 ist. Widerspruch. Also muss $\beta_{d+2} \neq 0$ sein.

Wir können damit (1) durch β_{d+2} teilen und erhalten

$$x_{d+2} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{\beta_{d+2}} x_i + \sum_{j=m+1}^{d+1} \frac{-\beta_j}{\beta_{d+2}} x_j \quad \text{und} \quad 1 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_1}{\beta_{d+2}} + \sum_{j=m+1}^{d+1} \frac{-\beta_j}{\beta_{d+2}},$$

womit wir also x_{d+2} als Affinkombination von $x_1, \dots, x_{d+1}$ geschrieben haben. Die Affinkoeffizienten nennen wir

$$\lambda_i := \begin{cases} \dfrac{\alpha_i}{\beta_{d+2}} & \text{falls } 1 \leq i \leq m, \\ \dfrac{-\beta_i}{\beta_{d+2}} & \text{falls } m+1 \leq i \leq d+1. \end{cases}$$

Da X' affin unabhängig ist, ist diese Darstellung eindeutig. Insbesondere sind gilt für die Vorzeichen der λ_i, dass

$$\operatorname{sign} \lambda_i = \begin{cases} +1 & \text{falls } 1 \leq i \leq m, \\ -1 & \text{falls } m+1 \leq i \leq d+1, \end{cases}$$

dass heißt wir können am Vorzeichen des Koeffizienten λ_i ablesen, ob x_i in Y oder Z liegt.

Angenommen, es gibt zwei verschiedene Zerlegungen Y, Z und Y', Z' von X mit $\operatorname{conv} Y \cap \operatorname{conv} Z \neq \varnothing$ und $\operatorname{conv} Y' \cap \operatorname{conv} Z' \neq \varnothing$. Seien nun λ_i bzw. λ'_i die gemäß den obigen Überlegungen zu Y, Z bzw. Y', Z' gehörigen Affinkoeffizienten. Da weder alle α_i, noch alle β_j gleich Null sein können, können wir o. B. d. A. davon ausgehen, dass $\lambda_1, \lambda'_1 \neq 0$ sind.

Ist $\mu := \frac{\lambda'_1}{\lambda_1}$, so gilt $\lambda'_1 - \mu \cdot \lambda_1 = 0$. Setze nun $\lambda''_i := \lambda'_i - \mu \cdot \lambda_i$ für alle $i = 1, \dots, d+2$. Aus $\lambda''_1 = 0$ folgt

$$\sum_{i=2}^{d+2} \lambda''_i x_i = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=2}^{d+2} \lambda''_i = 0.$$

Da $X \setminus \{x_1\}$ nach Voraussetzung affin unabhängig ist, haben diese Gleichungen nur die triviale Lösung $\lambda''_i = 0$ für alle $i = 2, \dots, d+2$.

Da $\lambda_1, \lambda'_1 > 0$ sind, haben also λ_i und λ'_i stets das gleiche Vorzeichen. Oben hatten wir aber gesehen, dass genau dann $x_i \in Y$ ist, wenn $\lambda_i > 0$ und analog $x_i \in Y' \iff \lambda'_i > 0$. Also ist $x_i \in Y \iff x_i \in Y'$, also $Y = Y'$ und $Z = Z'$. Die Zerlegung ist also eindeutig.

□

Aufgabe 21. Sei S eine Familie konvexer Körper im $\mathbb{E}^d$ mit mindestens $d+1$ Mitgliedern, $\alpha \in \mathbb{R}$ positiv. Zeigen Sie: Es gibt einen Punkt $x \in \mathbb{E}^d$, der zu jedem Mitglied der Familie S höchstens den Abstand α hat.

Beweis. Schreibe $d(x_0, Y) := \inf\{\|x - y\| \mid y \in Y\}$ für den Abstand eines Punktes x_0 von einer Menge Y.

Sei K eine konvexe Menge und $x \in \mathbb{E}^d$. $d(x, K) \leq \alpha$ gilt genau dann, wenn es ein $y \in K$ gibt, so dass $\|x - y\| \leq \alpha$, also genau dann, wenn es ein $y \in K$ gibt mit $x \in B_\alpha(y)$ (Kugel vom Radius α um y). Dies ist genau dann der Fall, wenn $x \in K + B_\alpha(0)$.

Für ein beliebiges $K_i \in S$ setzen wir $K'_i := K_i + B_\alpha(0)$ und $S' := \{ K'_i \mid K_i \in S \}$. Nach Voraussetzung haben je $d+1$ Mitglieder von S' einen nichtleeren Durchschnitt. Der

Satz von Helly besagt in dieser Situation, dass alle Mitglieder von S' einen nichtleeren Durchschnitt haben.

Jeder Punkt $x \in \bigcap_{K_i' \in S'} K_i' \neq \varnothing$ hat dann von keiner der Mengen $K_i \in S$ einen Abstand $> \alpha$, insbesondere gibt es also ein solches $x \in \mathbb{E}^d$. $\square$

Aufgabe 23. Auf einem Feld liegt eine Anzahl von weißen und schwarzen Schafen. Zeigen Sie: Kann man bei je 4 durch einen geradlinigen Zaun die weißen von den schwarzen Schafen trennen, dann kann man dies mit einem solchen Zaun für die ganze Herde. Verallgemeinern Sie die Aussage für höhere Dimensionen.

Verallgemeinerung: Seien $A, B \subset \mathbb{E}^d$ endliche Mengen und $A \cup B$ enthalte mindestens $d+2$ Punkte. Weiter gebe es zu jeder Teilmenge $C \subset A \cup B$ mit $d+2$ Punkten eine Hyperebene H_C mit $A \cap C \subset \operatorname{int} H_C^-$ und $B \cap C \subset \operatorname{int} H_C^+$, d.h. eine trennende Hyperebene für $A \cap C$ und $B \cap C$.

Dann gibt es eine Hyperebene H mit $A \subset \operatorname{int} H^-$ und $B \subset \operatorname{int} H^+$.

Das ursprüngliche Problem erhalten wir für $d = 2$. In diesem Fall sind A und B die schwarzen bzw. weißen Schafe, das Feld liegt in $\mathbb{E}^2$, $d+2 = 4$ und die Hyperebenen sind Geraden, entsprechen also unseren geradlinigen Zäunen.

Beweis. Sei $n = (\gamma_1, \dots, \gamma_d) \in \mathbb{E}^d$, $\gamma_{d+1} \in \mathbb{R}$ und $c := (n; \gamma_{d+1})$, d.h. $c = (\gamma_1, \dots, \gamma_d, \gamma_{d+1})$. Wir definieren die Hyperebene $H(c)$ durch

$$H(c) := \{\, x \in \mathbb{E}^d \mid x \cdot n = \gamma_{d+1} \,\}.$$

Wir können offenbar jede Hyperebene in $\mathbb{E}^d$ mit einem geeignetem $c \in \mathbb{E}^{d+1}$ als $H(c)$ schreiben.[1]

Für jedes $a \in A$ sie $K_a := \{\, c \in \mathbb{E}^{d+1} \mid c \cdot a < \gamma_{d+1} \,\}$. Die Elemente von $c \in K_a$ beschreiben also Hyperebenen $H(c)$, so dass $a \in \operatorname{int} H(c)^-$ ist. Entsprechend definieren wir $K_b := \{\, c \in \mathbb{E}^{d+1} \mid c \cdot b > \gamma_{d+1} \,\}$ für alle $b \in B$, womit $b \in \operatorname{int} H(c)^+$ für alle $c \in K_b$.

Sei $a \in A$ beliebig. Dann ist

$$\underbrace{(\lambda c + (1-\lambda)c')}_{=:c''} \cdot a = \lambda c \cdot a + (1-\lambda)c' \cdot a < \lambda \gamma_{d+1} + (1-\lambda)\gamma'_{d+1} =: \gamma''_{d+1}$$

für alle $c, c' \in K_a$ und $\lambda \in [0,1]$. Damit ist K_a konvex. Analog sind alle K_b konvex.

Nach Voraussetzung ist für jede Menge $C \subset A \cup B$ mit mindestens $d+2$ Punkten der Durchschnitt $\bigcap_{c \in C} K_c$ nichtleer. Nach dem Satz von Helly ist damit auch der Durchschnitt $K := \bigcap_{c \in A \cup B} K_c$ nichtleer. Jedes Element $c \in K$ repräsentiert eine Hyperebene $H := H(c)$, für die $A \subset \operatorname{int} H^-$ und $B \subset \operatorname{int} H^+$ gilt. $\square$

[1] Die ersten d Koordinaten von c enthalten den Normalenvektor, die letzte Koordinate die rechte Seite der Normalengleichung der Hyperebene.