Aufgaben zur Vorlesung Lineare Algebra I

Lösungsvorschläge für Blatt 1 — Sommersemester 2015

Aufgabe 1. Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar:

$$\frac{2+i}{4-5i}, \quad \frac{i-1}{i+1}, \quad \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3, \quad \frac{1}{i}.$$

Lösung. Wie aus der Vorlesung bekannt, ist bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen schlicht auszumultiplizieren und unter Verwendung von $i^2 = -1$ zu vereinfachen.

$$\begin{aligned}
\frac{2+i}{4-5i} &= \frac{(2+i)(4+5i)}{(4-5i)(4+5i)} = \frac{2\cdot 4 + 1\cdot 5i^2 + 2\cdot 5i + i\cdot 4}{4^2 - 5^2 i^2 - 5\cdot 4i + 4\cdot 5i} = \frac{3+14i}{41} = \frac{3}{41} + \frac{14}{41}i\\
\frac{i-1}{i+1} &= \frac{(i-1)(-i+1)}{(i+1)(-i+1)} = \frac{-i^2+i+i-1}{1^2 - i^2} = \frac{2i}{2} = i\\
\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2}i + 3\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3\\
&= \frac{1}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i - \frac{9}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8}i = -1\\
\frac{1}{i} &= \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{1} = -i
\end{aligned}$$

Alternativ kann man hier auch $i^4 = (-1)^2 = 1$ benutzen und

$$\frac{1}{i} = \frac{i^4}{i} = i^3 = -i$$

schreiben.

Aufgabe 2. Zeichnen Sie die folgenden komplexen Zahlen z_1, z_2, z_3, z_4 als Punkte der Ebene

$$z_i = 1 - \sqrt{3}i, \quad z_2 = i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5, \quad z_3 = \frac{3 + i\sqrt{7}}{4}, \quad z_4 = -2 - \frac{3}{2}i$$

und berechnen Sie ihre Beträge.

Lösung. Es ist $z_2 = i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 = i + (-1) + (-i) + 1 + i = i$. Also sind die gegebenen Zahlen wie in Abbildung 1 zu sehen auf der komplexen Ebene verteilt.

Aufgabe 3. Untersuchen Sie das Schnittverhalten der beiden Geraden L_1 und L_2, falls

(a) $L_1 = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^3 \mid 6x + 3y = 10 \,\}$, $L_2 = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 7x - 2y = -1 \,\}$,

(b) $L_1 = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + 6y = 8 \,\}$, $L_2 = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x + \frac{15}{2}y = 10 \,\}$,

(c) $L_1 = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{3}x - 3y = 0 \,\}$, $L_2 = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - \sqrt{3}y = 1 \,\}$.

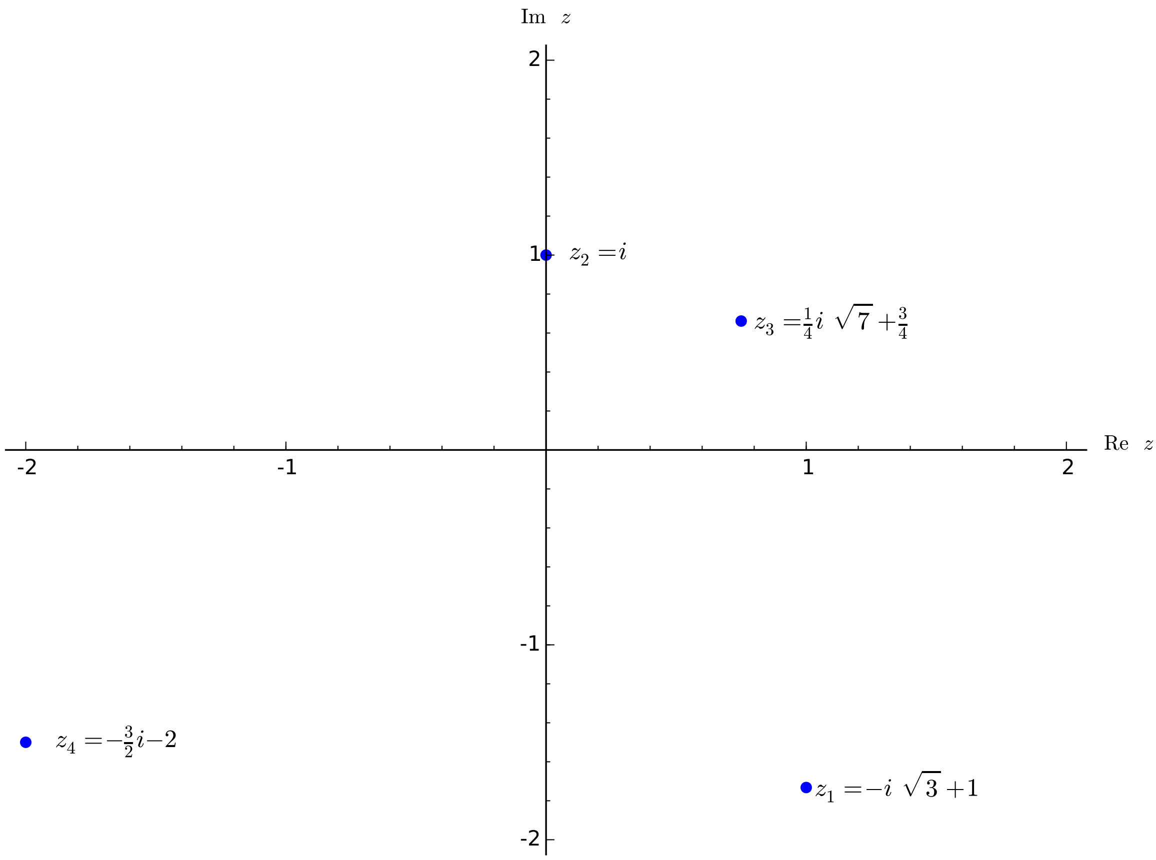

Abbildung 1: $z_1, \ldots, z_4$ in der komplexen Ebene

Lösung. Wir müssen alle Punkten in $L_1 \cap L_2$ liegen finden. Ist $L_1 \cap L_2 = \varnothing$, so sind die Geraden parallel. Sie sind identisch, falls $L_1 \cap L_2 = L_1 (= L_2)$ ist. Wenn $L_1 \cap L_2$ genau ein Element x besitzt, so schneiden sich die beiden Geraden im Punkt x. Um herauszufinden, welcher Fall vorliegt, können wir eine der Gleichungen nach x (oder y) umstellen und in die andere Einsetzen, das geeignete Vielfache einer Gleichung zur anderen addieren (oder davon subtrahieren) oder in Matrixschreibweise das Vielfache einer Zeile zu einer anderen addieren, bis wir eine Variable bestimmen können, sofern dies überhaupt möglich ist.
Alternativ genügt es auch, die Determinante der zum Gleichungssystem gehörenden Matrix, und eventuell weiterer Matrizen, zu betrachten. So erhalten wir zwar nicht die Lösungsmenge, wissen aber immerhin deren Mächtigkeit.[1] Ich habe für die verschiedenen Aufgabenteile unterschiedliche Wege gewählt. Grundsätzlich wäre aber jeder Weg für jede Teilaufgabe geeignet.

(a) $\det \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} = 6 \cdot (-2) - 3 \cdot 7 = -33 \neq 0$, das Gleichungssystem ist also für beliebige rechte Seiten eindeutig lösbar. Damit müssen sich L_1 und L_2 in genau einem Punkt scheiden.

(b) Wir können das Gleichungssystem wie folgt darstellen:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 8 \\ 5 & \frac{15}{2} & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 20 & 30 & 40 \\ 20 & 30 & 40 \end{array}\right)$$

[1] Die Anzahl der enthaltenen Elemente.

Wir müssen also simultan $20x+30y = 40$ und $20x+30y = 40$ lösen. Die beiden Gleichungen sind als identisch, weshalb auch die Geraden übereinstimmen müssen.

(c) Lösen wir die Gleichung aus L_1 nach x auf und setzen in L_2 ein, so erhalten wir

$$\sqrt{3}x - 3y = 0 \iff x = \sqrt{3}y \implies \sqrt{3}y - \sqrt{3}y = 1 \iff 0 = 1.$$

Dies ist offensichtlich falsch. Die Geraden müssen also parallel sein.

Aufgabe 4. Es sei

$$Q := \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x_1 \le 1 \text{ für } i = 1, 2, 3 \}$$

der Einheitswürfel im $\mathbb{R}^3$. Der Punkt $M := (1/2, 1/2, 1/2)$ ist dann der Mittelpunkt der Raumdiagonale d von $(0, 0, 0)$ nach $(1, 1, 1)$. Weiterhin stehe die Ebene E senkrecht auf d im Punkt M.
Berechnen Sie die Schnittfigur von E mit dem Rand ∂Q des Würfels Q.

Lösung. Zunächst einmal müssen wir die Ebene E genauer beschreiben. Eine Möglichkeit dafür ist die Koordinatendarstellung

$$E = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 3/2 \}.$$

Hierbei machen wir uns zunutze, dass der Vektor $(1, 1, 1)$ per definitionem senkrecht auf E steht und dass der Punkt $M = (1/2, 1/2, 1/2)$ auf E liegt.
Da die Schnittmenge zweier Ebenen im $\mathbb{R}^3$ entweder leer oder eine Gerade ist, genügt es die Schnittpunkte von E und den Kanten von Q zu bestimmen. Die Strecke zwischen zwei Schnittpunkten mit den Kanten von Q, die auf der gleichen Seite des Würfels liegen, gehört dann ebenfalls zu $E \cap \partial Q$.
Die Kanten des Würfels liegen auf den Geraden, die durch $x_i = x_j = 0$ bzw. $x_i = x_j = 1$ bzw. $x_i = 0, x_j = 1$ für $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, gegeben sind.
Für $x_1 = x_2 = 0$ erhalten wir $0 + 0 + x_3 = 3/2$, der Schnittpunkt mit der Ebene liegt also außerhalb von Q. Analog für $x_1 = x_3 = 0$ und $x_2 = x_3 = 0$.
Ist $x_i = x_j = 1$, so folgt $x_{6-i-j} = -1/2$. Daher liegen auch diese Schnittpunkte außerhalb von Q.
Es bleiben die Fälle $(x_1, x_2) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$, $(x_1, x_3) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$ und $(x_2, x_3) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$.
Da sowohl die Gleichung durch die E definiert ist, als auch Q symmetrisch in x_1, x_2, x_3 ist, genügt es, die Fälle $(x_1, x_2) = (0, 1)$ und $(x_1, x_2) = (1, 0)$ zu betrachten.
In beiden Fällen erhalten wir

$$1 + x_3 = \frac{3}{2} \iff x_3 = \frac{1}{2}.$$

Damit erhalten wir für jede der oben genannten Geraden einen Schnittpunkt der Kanten von Q mit E. Diese Schnittpunkte sind

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wie man sofort sieht, ist der Abstand jedes dieser Punkte von $M = (1/2, 1/2, 1/2)$ genau $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, sie liegen also auf einem Kreis um M in E. Zudem ist der Abstand zwischen zwei solchen Punkten $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, sofern die beiden Punkte auf der gleichen Seite von Q liegen. Die Schnittfigur ist damit ein regelmäßiges Sechseck, wie man auch in Abbildung 2 sehen kann.

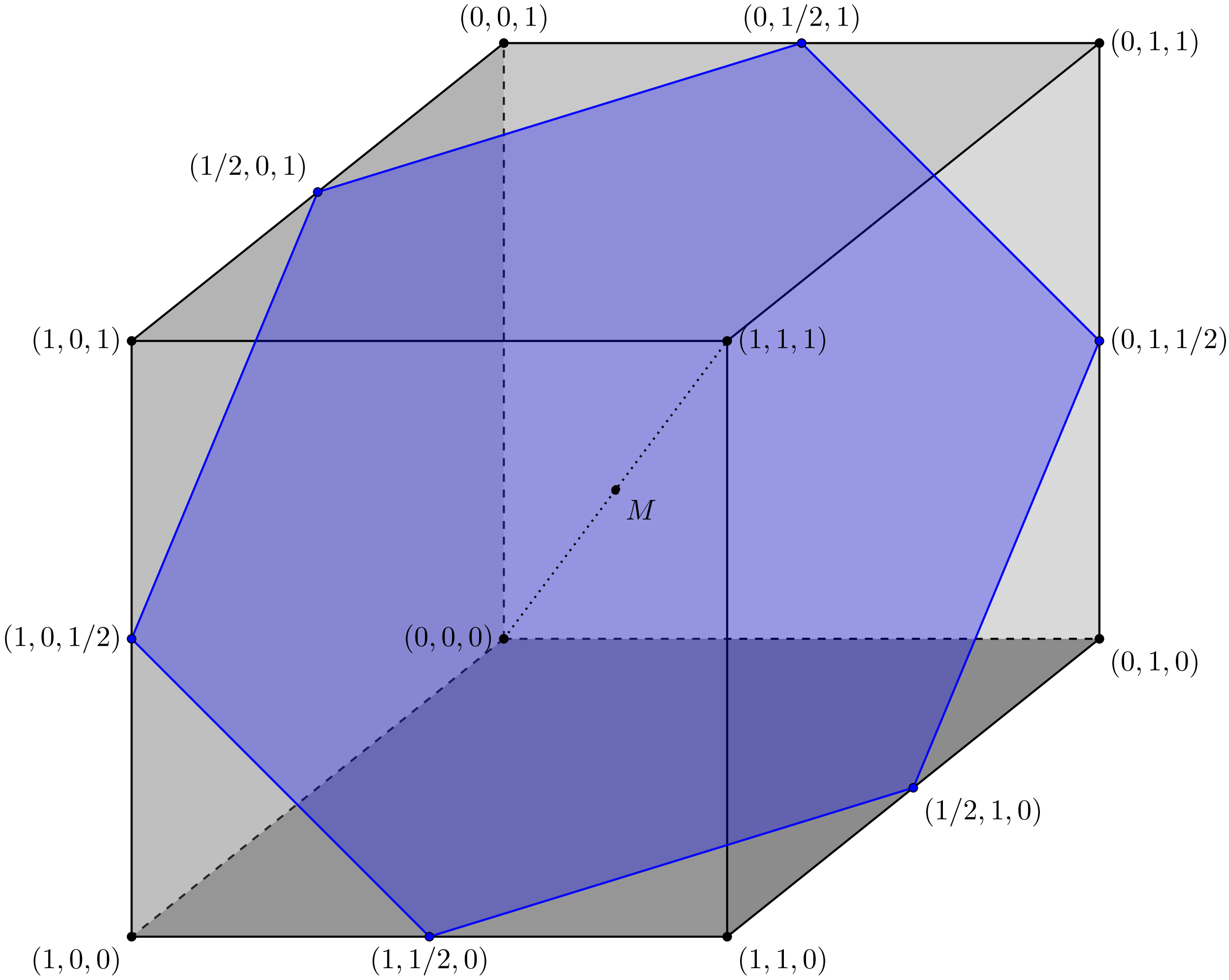

Abbildung 2: Würfel mit Schnittfigur